Microéconomie 2, DEMI2E
Cours de Vincent IEHLÉ

Université Paris-Dauphine
Année 2013-2014

FEUILLES D'EXERCICES [1]

Table des matières

1. Les exercices sont à préparer d'une semaine à l'autre en suivant une liste établie par le chargé de TD. Des exercices supplémentaires, utiles pour les révisions avant les examens, sont donnés en fin de chaque partie. Sauf exception, ces exercices ne seront pas traités en cours ou TD mais chaque étudiant peut choisir de les rendre comme devoir à son chargé de TD.

1 Le consommateur

Dans les exercices qui suivent, les préférences d'un consommateur sur des paniers de 2 biens sont représentées par une fonction d'utilité

$$u : \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R} \; : \; (x,y) \longrightarrow u(x,y)$$

1.1 Fonction d'utilité Cobb-Douglas :

$$u(x,y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$$

où $0 < \alpha < 1$

1. Déterminer les propriétés de la fonction u : continuité (justifier rapidement), différentiabilité (sur $\mathbb{R}^2_{++}$), (strictement) monotone, (strictement) (quasi)-concave.
2. Représenter graphiquement les courbes d'indifférence du consommateur.
3. Déterminer la demande du consommateur $d(p,w)$, en fonction du prix $p = (p_x, p_y)$ et d'un revenu $w \in \mathbb{R}_+$, en calculant le cas échéant le taux marginal de substitution $TMS_{y \to x}$. Analyser les propriétés de cette demande et l'exprimer en fonction d'une dotation initiale $e = (e_x, e_y) \in \mathbb{R}^2_+$ du consommateur.
4. Montrer que la fonction suivante représente les mêmes préférences : $u(x,y) = \alpha \ln x + (1-\alpha) \ln y$. Refaire les calculs de la question 3 en utilisant cette spécification.

1.2 Fonction d'utilité Leontief :

$$u(x,y) = \min(x,y)$$

Mêmes questions que précédemment (sauf 4.).

1.3 Fonction d'utilité linéaire :

$$u(x,y) = ax + y$$

où $a > 0$

Mêmes questions que précédemment (sauf 4.).

1.4 Fonction d'utilité à élasticité de substitution constante :

$$u(x,y) = (ax^\rho + by^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$$

où $a, b > 0$ et $0 \neq \rho \leq 1$

Mêmes questions que précédemment (sauf 4.).

1.5 Exercice supplémentaire : Fonction d'utilité à élasticité de substitution constante (II)

Dans le cas d'une fonction d'utilité à élasticité de substitution constante (exercice 1.4) :

1. Montrer que pour un choix adéquat de $\alpha > 0$ les fonctions suivantes représentent aussi les mêmes préférences :
   (a) $u(x,y) = (\alpha x^\rho + y^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$;
   (b) $u(x,y) = \rho(\alpha x^\rho + y^\rho)$.
2. Montrer que si $\rho = 1$, on retrouve le cas d'une fonction linéaire, si $\rho \to 0$, on retrouve une fonction Cobb-Douglas, si $\rho \to -\infty$ on retrouve une fonction Leontief (dans les 2 derniers cas utiliser les TMS ou les courbes d'indifférence).
3. Etant donné une fonction de demande $d(p,w) = (d_x(p,w), d_y(p,w))$, on définit l'élasticité de substitution par

$$\xi_{xy}(p,w) = \frac{-\partial[\frac{d_x(p,w)}{d_y(p,w)}]}{\partial[\frac{p_x}{p_y}]} \frac{\frac{p_x}{p_y}}{\frac{d_x(p,w)}{d_y(p,w)}}$$

   qui mesure la sensibilité de $\frac{d_x(p,w)}{d_y(p,w)}$ à une variation de $\frac{p_x}{p_y}$. Vérifier que ce coefficient est indépendant de p et w (d'où le nom).

1.6 Exercice supplémentaire : Non satiation

On dit que la fonction d'utilité satisfait la condition de non satiation si pour tout $x \in \mathbb{R}_+^2$ il existe $x' \in \mathbb{R}_+^2$ telle que $u(x') > u(x)$.

1. Montrer que si la stricte monotonicité est vérifiée alors la condition de non-satiation est vérifiée.
2. Montrer que la contrainte de budget est saturée à la demande si la stricte monotonicité est vérifiée. Cela est-il encore vrai si la fonction d'utilité satisfait la propriété de non satiation ? Sinon, construire un contre-exemple.
3. On suppose que la fonction de demande pour le premier bien est donnée par $d_x(p,w) = \frac{\alpha w}{p_x}$. En déduire la fonction de demande pour le second bien.

1.7 Exercice supplémentaire : Fonction d'utilité particulière (difficile)

On considère la fonction d'utilité suivante :

$$u(x,y) = x + \sqrt{y}$$

Déterminer la demande du consommateur $d(p,w)$ (Il est impératif de tracer précisément les courbes d'indifférences pour se donner une idée des solutions (plusieurs cas à traiter)).

2 Economies d'échange

Dans les exercices qui suivent, on considère une économie d'échange à 2 agents (1 et 2) et 2 biens (x et y). Les dotations initiales des agents sont notées $e^i = (e^i_x, e^i_y) \in \mathbb{R}^2_+$ et leurs fonctions d'utilité $u^i : \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ $i = 1, 2$.

2.1 Fonction d'utilité Cobb-Douglas :

$$u^1(x,y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}},\ u^2(x,y) = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$$
$$e^1 = (1,1),\ e^2 = (1,2)$$

1. Vérifier si l'économie possède un équilibre concurrentiel.
2. Si oui, déterminer **les prix** et **les allocations** correspondantes.
3. Représenter les différentes quantités dans une boîte d'Edgeworth.

2.2 Fonction d'utilité de Leontief :

$$u^1(x,y) = u^2(x,y) = \min(x,y)$$
$$e^1 = (2,6),\ e^2 = (1,2)$$

Mêmes questions que précédemment

2.3 Fonction d'utilité linéaire :

$$u^1(x,y) = ax + y,\ u^2(x,y) = x + ay \text{ où } 0 < a < 1$$
$$e^1 = (1,1),\ e^2 = (1,2)$$

Mêmes questions que précédemment

2.4 Exercice supplémentaire : Fonction d'utilité à élasticité de substitution constante

$$u^1(x,y) = (\frac{1}{8}x^{-2} + y^{-2})^{-\frac{1}{2}},\ u^2(x,y) = (x^{-2} + \frac{1}{8}y^{-2})^{-\frac{1}{2}}$$
$$e^1 = (1,0),\ e^2 = (0,1)$$

Mêmes questions que précédemment (En normalisant le prix du bien y, montrer que $(p_x, 1)$ est un prix d'équilibre si et seulement si $p_x^{\frac{1}{3}}$ est solution de l'équation $(1-z)(2z^2+z+2) = 0$).

2.5 Exercice supplémentaire : Préférences non convexes

Les dotations initiales des agents sont $e^1 = e^2 = (1,1)$ et leurs fonctions d'utilité respectives :

$$u^1(x,y) = \begin{cases} x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} & \text{si } x \leq y \\ x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} & \text{si } x > y \end{cases}$$

$$u^2(x,y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$$

1. Représenter quelques courbes d'indifférence du consommateur 1. Montrer que les préférences du consommateur sont continues, strictement croissantes mais non convexes (ni différentiables partout).
2. Déterminer la correspondance de demande du consommateur 1. Que se passe-t-il quand $p_x = p_y$? Représenter graphiquement la demande en bien x en fonction de p_x, en posant $p_y = 1$.
3. Montrer que l'économie constituée des agents 1 et 2 n'a pas d'équilibre concurrentiel.
4. Considérons maintenant une économie comprenant 4 agents dans laquelle deux agents ont les mêmes préférences et la même dotation initiale que l'agent 1, tandis que les deux autres sont semblables à l'agent 2. Montrer que cette économie a un équilibre concurrentiel. Le déterminer et commenter.

2.6 Exercice supplémentaire : Non-existence de l'équilibre

Les fonctions d'utilité sont données par
$u^1(x, y) = x + y$
$u^2(x, y) = x$
Les dotations initiales de ces deux consommateurs sont $e^1 = (0, 1)$ et $e^2 = (2, 1)$.

1. Montrer qu'il n'existe pas d'équilibre concurrentiel. (Travailler graphiquement dans la boite d'Edgeworth).
2. Comment peut-on rétablir l'existence de l'équilibre ?

2.7 Exercice supplémentaire : Unicité de l'équilibre

Les préférences du premier consommateur sont représentées par la fonction d'utilité $u^1(x, y) = xy$ et celles du deuxième par la fonction $u^2(x, y) = \min\{x, y\}$. On suppose que $e^1 + e^2 = (2, 4)$.

1. Tracer la boite d'Edgeworth et tracer dans cette boite les courbes d'indifférences des deux consommateurs pour le niveau d'utilité 1.
2. Soit $((p_x, p_y), (x^1, y^1), (x^2, y^2))$, un équilibre concurrentiel. Montrer qu'il existe un réel $t \in]0, 2[$ tel que $(x^2, y^2) = (t, t)$ et donc tel que $(x^1, y^1) = (2 - t, 4 - t)$.
3. Montrer que le prix (p_x, p_y) est colinéaire au vecteur gradient de la fonction d'utilité du premier consommateur au point (x^1, y^1). En déduire que le prix (p_x, p_y) est colinéaire au vecteur $(4 - t, 2 - t)$.
4. Justifier pourquoi $(p_x, p_y)\cdot(x^1, y^1) = (p_x, p_y)\cdot(e^1_x, e^1_y)$. En déduire que t vérifie l'équation suivante : $(4 - t)e^1_x + (2 - t)e^1_y - 2(2 - t)(4 - t) = 0$
5. Montrer que cette équation a toujours une unique solution appartenant à $]0, 2[$ (on ne cherchera pas à calculer cette solution). En déduire que l'économie a toujours un unique équilibre.
6. Calculer les allocations d'équilibre et le prix d'équilibre lorsque $e^1 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Représenter l'équilibre dans la boîte d'Edgeworth.

3 Optimalité de Pareto

Comme dans la feuille précédente, on considère une économie d'échange à 2 agents (1 et 2) et 2 biens (x et y). Les dotations initiales des agents sont notées $e^i = (e^i_x, e^i_y) \in \mathbb{R}^2_+$ et leurs fonctions d'utilité $u^i : \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ $i = 1, 2$. Une allocation est désignée par $z = [(x^1, y^1), (x^2, y^2)]$.

3.1 Fonction d'utilité Cobb-Douglas :

$$u^1(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}},\ u^2(x,y) = x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$$
$$e^1 = (1,1),\ e^2 = (1,2)$$

$$z = [(1, \frac{12}{5}), (1, \frac{3}{5})]$$

1. Déterminer la courbe des contrats et la représenter dans une boîte d'Edgeworth.
2. Vérifier si vous disposez des données nécessaires, que les équilibres concurrentiels éventuels sont Pareto-optimaux.
3. Le cas échéant, montrer que l'allocation z correspond à un équilibre concurrentiel moyennant un transfert approprié de richesse. Déterminer ce transfert.

3.2 Fonction d'utilité linéaire :

$$u^1(x,y) = 2x + y,\ u^2(x,y) = x + 2y$$
$$e^1 + e^2 = (1,1)$$

Mêmes questions que précédemment

3.3 Fonction d'utilité à élasticité de substitution constante :

$$u^1(x,y) = u^2(x,y) = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y}$$
$$e^1 = (\frac{1}{2}, 1),\ e^2 = (\frac{3}{2}, 1)$$
$$z = [(1,1), (1,1)]$$

Mêmes questions que précédemment

3.4 Exercice supplémentaire : Fonctions d'utilité Cobb-Douglas et linéaire

$$u^1(x,y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}},\ u^2(x,y) = x + y$$

$$e^1 = (\frac{1}{2}, 1),\ e^2 = (\frac{3}{2}, 1)$$

$$z = [(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, (\frac{5}{4}, \frac{1}{2})]$$

Mêmes questions que précédemment

3.5 Exercice supplémentaire : Décentralisation

Les dotations initiales sont données par $e_1 = (1,1)$ et $e_2 = (1,1)$. Les fonctions d'utilité sont données par :
$u^1(x,y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$
$u^2(a,b) = x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$

1. Déterminer la courbe des contrats
2. Pour des raisons d'équité, l'Etat souhaiterait privilégier l'optimum de Pareto qui garantit une quantité égale de bien x aux deux consommateurs. De quel optimum s'agit-il ?
3. Pour décentraliser cet optimum, l'Etat a la possibilité d'effectuer un transfert dans les dotations initiales en bien y. Déterminer ce transfert et l'équilibre concurrentiel correspondant

4 Economies avec production

4.1 Rendements

Soit la fonction de production Cobb-Douglas $g : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = x^\alpha y^\beta$, avec $\alpha, \beta > 0$.

1. Décrire l'ensemble de production, en fonction des paramètres α, β.
2. A quelles conditions sur les paramètres les rendements sont-ils décroissants ? constants ? croissants ?

4.2 Rendements (II)

Soit la fonction de production à élasticité de substitution constante $g : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = (ax^\rho + by^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$, $\rho < 1$. Montrer que les rendements sont constants.

4.3 Maximisation du profit

1. Dans le cas de fonctions de production linéaires, déterminer graphiquement et analytiquement les solutions du problème de maximisation du profit en dessinant les courbes d'iso-profit (dans $\mathbb{R}^2$).
2. Soit la fonction de production Cobb-Douglas $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^\alpha$ où $0 < \alpha < 1$. Déterminer l'offre de l'entreprise et le profit associé en fonction des prix.

4.4 Equilibre avec production

On considère une économie consistant en deux consommateurs (1 et 2), un producteur et deux biens (x et y). Les dotations initiales des consommateurs, notées $e^i = (e_x^i, e_y^i) \in \mathbb{R}_+^2$, sont $e^1 = (10, 20)$ et $e^2 = (10, 32)$; leur fonction d'utilité est $u^i(x,y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$, $i = 1, 2$. Le consommateur 1 possède l'entreprise qui produit du bien x à partir du bien y suivant la technologie $x = g(y) = 2\sqrt{y}$.

1. Déterminer la fonction de demande $(d_x^i(p,\pi), d_y^i(p,\pi))$ de chaque consommateur i, en termes des biens x et y, en fonction du vecteur de prix $p = (p_x, p_y)$ et du profit π de l'entreprise.
2. Déterminer la fonction d'offre $x^*(p)$, $y^*(p)$ et le profit maximal $\pi^*(p)$ de l'entreprise en fonction du vecteur de prix $p = (p_x, p_y)$.
3. Montrer qu'il existe un équilibre concurrentiel et le déterminer. Vérifier que cet équilibre est Pareto-optimal.

4.5 Equilibre avec production (II)

On considère une économie à la Robinson Crusoé. Les biens sont une denrée alimentaire x et le temps de loisir y. Le consommateur a une dotation initiale $e = (e_x, e_y) = (0, 24)$ et une fonction d'utilité Cobb-Douglas $u(x,y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. L'entreprise produit une quantité $g(t)$ de denrée alimentaire à partir de t heures de travail, le temps de travail étant $t = 24 - y$. On normalise le prix d'une unité de denrée alimentaire à 1 et on note ω le salaire horaire.

1. Déterminer la fonction de demande $(d_x(\omega,\pi), d_t(\omega,\pi))$ du consommateur, en termes de denrée alimentaire et de travail, en fonction du salaire horaire ω et du profit π de l'entreprise.
2. On suppose que $g(t) = \sqrt{t}$. Montrer que les rendements sont décroissants. Déterminer la fonction d'offre $(x^*(\omega), t^*(\omega))$ et le profit maximal $\pi^*(\omega)$ de l'entreprise en fonction du salaire horaire ω. Montrer qu'il existe un équilibre concurrentiel et déterminer le salaire horaire à l'équilibre.

3. On suppose maintenant que $g(t) = at$, $a > 0$. Montrer que les rendements sont constants et qu'il existe un équilibre concurrentiel. Déterminer le salaire horaire à l'équilibre.
4. On suppose enfin que $g(t) = t^2$. Montrer que les rendements sont croissants, que le "problème unifié" de Robinson : $\max_{x,t} u(x, 24-t)$ sous $x = t^2$, $t \leq 24$, a une solution (optimum de Pareto) mais que cet optimum n'est pas décentralisable et qu'il n'y a donc pas d'équilibre concurrentiel.

4.6 Exercice supplémentaire : Equilibre avec deux producteurs

On considère une variante de l'économie de l'exercice 4.4 consistant en deux consommateurs (1 et 2), deux producteurs (1 et 2) et deux biens (x et y). Les dotations initiales des consommateurs, notées $e^i = (e^i_x, e^i_y) \in \mathbb{R}^2_+$, sont $e^1 = (10, 20)$ et $e^2 = (10, 32)$; leur fonction d'utilité est $u^i(x, y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$, $i = 1, 2$. Le consommateur 1 possède la moitié de l'entreprise 1 et 25% de l'entreprise 2 (le consommateur 2 possède le reste !). Les deux entreprises produisent x à partir du bien y suivant les technologies $x = g_1(y) = 2\sqrt{y}$ et $x = g_2(y) = \sqrt{y}$.

1. Déterminer la fonction de demande $(d^i_x(p, \pi), d^i_y(p, \pi))$ de chaque consommateur i, en termes des biens x et y, en fonction du vecteur de prix $p = (p_x, p_y)$ et des fonctions de profits π^1 et π^2 des entreprises.
2. Déterminer la fonction d'offre $x^{j*}(p)$, $y^{j*}(p)$ et le profit π^j, $j = 1, 2$, des deux entreprises en fonction du vecteur de prix $p = (p_x, p_y)$.
3. Montrer qu'il existe un équilibre concurrentiel et le déterminer. Vérifier que cet équilibre est Pareto-optimal.

5 Défaillances du marché : effets externes et biens publics

5.1 Externalité

On considère une variante de l'économie de l'exercice 4.4 consistant en deux consommateurs (1 et 2), un producteur et deux biens (1 et 2). Les dotation initiales des consommateurs sont $e^1 = (10, 20)$ et $e^2 = (10, 32)$, respectivement. Le consommateur 1 possède l'entreprise, qui produit du bien 1 à partir du bien 2 suivant la technologie $q = g(z) = 2\sqrt{z}$ (pour éviter toute confusion, on désigne par z l'input en bien 2 et par q l'output en bien 1). La fonction d'utilité du consommateur 1 est $u^1(x, y) = \sqrt{xy}$; le consommateur 2 subit maintenant une externalité de la part de l'entreprise : sa fonction d'utilité devient $u^2(x, y, z) = \sqrt{xy} - 2z$, où z est la quantité de bien 2 utilisée par l'entreprise (et comme précédemment, x et y, les quantités de bien 1 et bien 2 respectivement consommées par le consommateur 2).

1. Montrer que l'équilibre concurrentiel calculé à l'exercice 4.4 est encore un équilibre dans l'économie avec externalité.
2. Vérifier que l'allocation suivante : $q = 2$, $z = 1$, $(x^1, y^1) = (12, 22)$, $(x^2, y^2) = (10, 29)$ est réalisable et Pareto-domine l'équilibre trouvé à la question précédente.

5.2 Externalité

On considère une économie, consistant en deux entreprises (1 et 2), un consommateur, un facteur de production et deux biens de consommation (1 et 2). Le consommateur détient initialement k unités du facteur de production (où $k > 0$ est un paramètre fixé) ; l'entreprise h, $h = 1, 2$. La fonction de production de l'entreprise 1 est $y_1 = g_1(z_1) = z_1$ tandis que celle de l'entreprise 2 est $y_2 = g_2(z_2) = az_2$ où $a > 0$ est perçu comme un paramètre fixé par l'entreprise 2. En fait, $a = y_1$ où y_1 est la quantité de bien 1 produite par l'entreprise 1 et représente donc une externalité de production. Le consommateur ne tire d'utilité que des biens de consommation ; sa fonction d'utilité est $u(x_1, x_2) = x_1x_2$.

1. Déterminer (en fonction de k) l'équilibre concurrentiel de l'économie en normalisant à 1 le prix de facteur de production. (Indication : ne tenir compte de l'externalité qu'après avoir déterminé l'équilibre en traitant a comme un paramètre).
2. Déterminer (en fonction de k) et représenter graphiquement l'ensemble des productions (y_1, y_2) réalisables (y_h désignant la quantité de bien de consommation h produit par l'entreprise h, $h = 1, 2$).
3. En identifiant la quantité de bien h consommée par le consommateur avec la quantité de bien h produite, déterminer (en fonction de k) la ou les productions réalisables (y_1^*, y_2^*) qui maximisent l'utilité du consommateur.
4. Comparer les solutions obtenues en 1. et 4.
5. On modifie l'économie en taxant le bien 2. Pour ce bien, on distingue le prix à la production p_2 et le prix à la consommation $p_2 + t$, où t désigne une taxe unitaire. Les recettes fiscales sont redistribuées au consommateur sous forme de transfert forfaitaire. Déterminer (en fonction de k et t) l'équilibre avec taxe.
6. Montrer qu'on peut choisir la taxe t pour que l'équilibre avec taxe calculé en 5. coïncide avec l'optimum calculé en 3.

5.3 Bien public

On considère une économie comprenant deux consommateurs (1 et 2) dont les fonctions d'utilité sont respectivement :

$$u^1(x^1, y) = \ln x^1 + 2 \ln y$$

$$u^2(x^2, y) = 2\ln x^2 + \ln y$$

où $x^i > 0$ désigne la quantité de bien privé consommé par l'agent i et $y > 0$ la quantité de bien public produit dans l'économie. La fonction de production du bien public à partir du bien privé est $y = g(z) = z$. La dotation initiale de chaue consommateur est de 15 unités de bien privé.

1. Caractériser l'ensemble des allocations (x^1, x^2, y, z) réalisables dans l'économie.
2. Caractériser l'ensemble des allocations (x^1, x^2, y, z) Pareto-optimales.
3. Déterminer l'optimum de Pareto associé à des prélèvements identiques pour les deux consommateurs.
4. Déterminer l'équilibre de Lindahl et montrer que c'est un optimum de Pareto.
5. Déterminer l'équilibre avec souscription (en déterminant au préalable les fonctions de réaction $z^1(z^2)$ et $z^2(z^1)$) et montrer que ce n'est pas un optimum de Pareto.

6 Annales d'examens

Microéconomie 2, avril 2009 (2 heures)

I. (12,5 pts) On considère une économie d'échange à 2 agents (1 et 2) et 2 biens (x et y). Les dotations initiales des agents, notées $e^i = (e^i_x, e^i_y) \in \mathbb{R}^2_+$, sont

$$e^1 = (1, 0) \qquad e^2 = (0, 1)$$

Les fonctions d'utilité $u^i : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, sont

$$u^1(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}, \quad u^2(x, y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$$

1. (2 pts) Vérifiez *explicitement* si la fonction d'utilité du premier agent est : croissante, strictement croissante, quasi-concave, strictement quasi-concave.
2. (2 pts) Déterminez la demande de chacun des agents en fonction du prix $p = (p_x, p_y)$ et de sa dotation initiale, en donnant les étapes du calcul.
3. (1,5 pt) Peut-on dire, *sans faire aucun calcul*, que cette économie possède un équilibre concurrentiel ? Pourquoi ?
4. (1 pt) Le cas échéant, déterminez l'équilibre (ou les équilibres) concurrentiel(s) de cette économie.
5. (0,5 pt) Déterminez la demande excédentaire agrégée en fonction du prix $p = (p_x, p_y)$.
6. (1,5 pt) Montrez que les biens sont substituts bruts l'un de l'autre, quel que soit le prix $p = (p_x, p_y)$. Qu'est-ce que cela implique pour les équilibres concurrentiels ?
7. (1 pt) Déterminez l'équation de la courbe des contrats, en donnant les étapes du calcul.
8. (1 pt) Quelles sont les propriétés de l'allocation $\left[(\frac{1}{4}, \frac{3}{5}), (\frac{3}{4}, \frac{2}{5})\right]$?
9. (2 pts) Représentez dans une boîte d'Edgeworth : les dotations initiales, quelques courbes d'indifférence des agents, l'équilibre (ou les équilibres) concurrentiel(s) éventuels (droite budgétaire et allocations), la courbe des contrats.

II. (5 pts) Dans une économie à 2 biens (x et y), on considère un consommateur qui dispose d'une dotation intiale $e^1 = (1, 2)$; sa fonction d'utilité est $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R} : u(x, y) = \min(3x, y)$.

1. (1 pt) Représentez graphiquement quelques courbes d'indifférence du consommateur.
2. (1,5 pt) A partir de la représentation graphique, étudiez les propriétés de la fonction d'utilité u du consommateur.
3. (1 pt) Déterminez la demande du consommateur en fonction de sa dotation initiale et du prix $p = (p_x, p_y)$ pour $p_x > 0$ et $p_y > 0$. Une représentation graphique est souhaitable.
4. (1,5 pt) Même question qu'en 3. pour un prix $p = (p_x, p_y)$ tel que $p_x = 0$ et $p_y > 0$, c'est-à-dire déterminez toutes les solutions du problème d'optimisation du consommateur dans ce cas. Une représentation graphique est souhaitable.

III. (2,5 pts) Dans une économie d'échange à 3 agents et 2 biens, un planificateur a vérifié que l'allocation $[(1, 5); (4, 4); (5, 1)]$ était Pareto-optimale. Le planificateur souhaite "décentraliser cette allocation dans un équilibre concurrentiel". Que veut-il dire ? Dans quelle mesure et comment peut-il y parvenir ?

Microéconomie 2, juin 2009 (2 heures)

I. (8 pts) On considère un premier consommateur dont les préférences sur des paniers de deux biens (x, y) sont représentées par la fonction d'utilité $u(x, y) = \sqrt{x} + y$ (x désigne une quantité de bien de consommation, y une quantité de "numéraire").

1. (2 pts) Représentez graphiquement trois courbes d'indifférence de ce consommateur. Qu'ont-elles de particulier ? A partir de la représentation graphique : la fonction d'utilité du consommateur est-elle croissante, strictement croissante, quasi-concave, strictement quasi-concave ?
2. (2 pts) Déterminez les solutions "intérieures" ($x > 0$, $y > 0$) du problème d'optimisation du consommateur, en fonction du revenu w du consommateur et du prix p ($= p_x$) du bien x, en fixant à 1 le prix du bien y (numéraire). Qu'ont-elles de particulier ?
3. (1,5 pts) On considère à présent une économie d'échange, dans laquelle le consommateur ci-dessus possède une dotation initiale $e^1 = (e^1_x, e^1_y) = (0, 10)$ tandis qu'un deuxième consommateur, de même fonction d'utilité $u(x, y)$, possède une dotation initale $e^2 = (e^2_x, e^2_y) = (2, 0)$. Déterminez les équilibres concurrentiels "intérieurs" éventuels de cette économie (on suppose toujours que le bien y tient lieu de numéraire).
4. (1,5 pts) Représentez dans une boîte d'Edgeworth : les dotations initiales, l'équilibre (ou les équilibres) concurrentiel(s) éventuels (droite budgétaire et allocations).
5. (1 pt) Déterminez les allocations Pareto-optimales "intérieures". Pensez-vous qu'il y ait d'autres allocations Pareto-optimales ? Si oui, lesquelles ?

II. (8 pts) On considère une économie avec production, comprenant un consommateur, une entreprise et deux biens. Le consommateur a une dotation initiale $e = (e_x, e_y) = (10, 0)$ et une fonction d'utilité $u(x, y) = \frac{xy}{x+4y}$. L'entreprise produit une quantité $y = g(x)$ du second bien à partir de x unités du premier. On normalise le prix du premier bien p_x à 1 et on note $p_y = p$ le prix du second bien.

1. (1,5 pts) Définissez la notion d'"élasticité de substitution" et écrivez la fonction d'utilité du consommateur de manière à montrer qu'elle est à élasticité de substitution constante ; indiquez la valeur des paramètres.
2. (2 pts) Déterminez la fonction de demande $(d_x(p, \pi), d_y(p, \pi))$ du consommateur en fonction du prix p et du profit π de l'entreprise.
3. (1,5 pts) On suppose que $g(x) = 9x$. Représentez graphiquement l'ensemble de production et les droites d'isoprofit de l'entreprise. Déterminez, en fonction du prix p, l'offre (ou les offres) $(x^*(p), y^*(p))$ et le profit maximal $\pi^*(p)$ de l'entreprise (pour autant que ces quantités existent).
4. (1,5 pts) Calculez l'équilibre (ou les équilibres) concurrentiel(s) éventuel(s), en supposant toujours que $g(x) = 9x$.
5. (1,5 pts) Calculez l'équilibre (ou les équilibres) concurrentiel(s) éventuel(s), en supposant à présent que $g(x) = e^x - 1$.

III. (4 pts) On considère une économie comprenant deux consommateurs (1 et 2), un bien privé et un bien public. Les fonctions d'utilité des consommateurs, $u^i : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, sont $u^1(x_1, y) = x_1^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$ et $u^2(x_2, y) = x_2^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$ où x_i désigne la quantité de bien privé consommée par l'agent i et $y > 0$, la quantité du bien public. La fonction de production du bien public à partir du bien privé est $y = g(z) = \sqrt{z}$. La dotation initiale globale des deux consommateurs est de 10 unités de bien privé. Vérifiez si chacune des cinq allocations (x_1, x_2, y) suivantes est réalisable et/ou Pareto-optimale : $(3, 3, 2)$; $(5, 5, 0)$; $(2, 8, 2)$; $(2, 4, 2)$; $(3, 3.2, \sqrt{3.8})$. Justifiez brièvement.

Microéconomie 2, septembre 2009 (2 heures)

Question I (10 pts)

1. (3 pts) On considère une économie à deux consommateurs ($i = 1, 2$) et deux biens de consommation, le carburant et le sucre. On note x^i la consommation de carburant du consommateur i et y^i, sa consommation de sucre ($i = 1, 2$). Les fonctions d'utilité des consommateurs sont respectivement $u^1(x^1, y^1) = \ln x^1 + 2 \ln y^1$ et $u^2(x^2, y^2) = 2 \ln x^2 + \ln y^2$. On suppose que chaque consommateur i dispose d'un revenu w^i, $i = 1, 2$ (dont l'origine n'est pas spécifiée pour l'instant) ; on note p_c, le prix d'une unité de carburant et p_s, le prix d'une unité de sucre. Déterminez la fonction de demande de chaque consommateur i, en fonction de son revenu w^i, $i = 1, 2$, et des prix p_c et p_s.
2. (4 pts) On suppose de plus qu'une entreprise C produit le carburant c à partir de betterave, suivant la technologie $q_c = \sqrt{z_c}$ et qu'une entreprise S produit le sucre s, également à partir de betterave, suivant la technologie $q_s = 2\sqrt{z_s}$ (q_k désigne l'output de bien k et z_k, l'input de betterave, $k = c, s$). On fixe le prix d'une unité de betterave à 1 et on définit les prix p_c et p_s comme en 1. ci-dessus.

   i Décrivez les ensembles de production des entreprises et indiquez la nature des rendements.

   ii Déterminez la fonction d'offre de chaque entreprise en fonction des prix p_c et p_s.
3. (3 pts) On suppose à présent que chaque consommateur possède une dotation initiale d'une unité de betterave ainsi que la moitié de chaque entreprise. Chaque consommateur n'a d'utilité que pour le carburant et le sucre, suivant la fonction u^i en 1. ci-dessus, $i = 1, 2$. Déterminez l'équilibre concurrentiel de l'économie de production constituée par les deux consommateurs et les deux entreprises, c'est-à-dire les prix d'équilibre, les quantités d'input et d'output de chaque entreprise et les quantités consommées par chaque consommateur.

Question II (5 pts) On considère une économie d'échange à deux agents (1 et 2) et deux biens (1 et 2). On note x^i la consommation de bien 1 de l'agent i et y^i, la consommation de bien 2 de l'agent i ($i = 1, 2$). Les dotations initiales des agents sont $e^1 = (e^1_x, e^1_y) = (0, 3)$ et $e^2 = (e^2_x, e^2_y) = (2, 1)$ et leurs fonctions d'utilité $u^i : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ sont

$$u^1(x^1, y^1) = x^1 + 5y^1,\ u^2(x^2, y^2) = 5x^2 + y^2$$

Déterminez la courbe des contrats et représentez-la dans une boîte d'Edgeworth, dans laquelle vous indiquerez aussi les dotations initiales.

Question III (5 pts) On considère une économie d'*échange*.

i Expliquez la notion d' “optimum de Pareto”.

ii Enoncez le “premier théorème du bien-être” et donnez-en une brève interprétation.

iii Définissez la notion d'“externalité” et donnez-en un exemple.

iv Le “premier théorème du bien-être” s'applique-t-il en présence d'externalités ? Expliquez brièvement.

Microéconomie 2, novembre 2009 (2 heures)

Question I (12 pts) On considère une économie d'échange comprenant deux consommateurs (1 et 2) et deux biens (x et y). Les dotations initiales sont $e^1 = (e_x^1, e_y^1) \in \mathbb{R}_+^2$ et $e^2 = (e_x^2, e_y^2) \in \mathbb{R}_+^2$. Les fonctions d'utilité des deux consommateurs sont données par $u^1(x,y) = u^2(x,y) = \frac{xy}{x+4y}$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$.

1. (1 pt) Ecrire la fonction d'utilité des consommateurs de manière à montrer qu'elle est à élasticité de substitution constante ; indiquer la valeur des paramètres.
2. (1 pt) Représenter **précisément** au moins 3 courbes d'indifférence.
3. (1,5 pts) Vérifier par le calcul que les courbes d'indifférence sont strictement décroissantes et strictement convexes. Que peut-on en déduire sur la fonction d'utilité des consommateurs ?
4. (0,5 pt) Peut-on dire, *sans faire aucun calcul*, que cette économie possède un équilibre concurrentiel ?
5. (3 pts) Déterminer la demande de chacun des agents en fonction du prix $p = (p_x, p_y)$, pour $p_x > 0$ et $p_y > 0$, et de sa dotation initiale, en donnant les étapes du calcul.
6. (2.5 pts) Ecrire les équations d'équilibre sur les marchés des biens en fonctions du prix (p_x, p_y). Montrer que le prix $(p^*, 1)$ (on normalise du prix du bien y) est un prix d'équilibre si et seulement si $p^* = 4\frac{(e_y^1+e_y^2)^2}{(e_x^1+e_x^2)^2}$.
7. (2.5 pts) Pour les dotations $e^1 = (3,1)$ et $e^2 = (5,1)$ déterminer l'équilibre concurrentiel et représenter **précisément** l'économie et l'équilibre dans la boîte d'Edgeworth (boîte, dotations initiales, courbes d'indifférence, contraintes budgétaires, allocations).

Question II (3 pts) Dans une économie à 2 biens (x et y), on considère un consommateur qui dispose d'une dotation intiale $e = (\frac{7}{2}, \frac{5}{3})$; sa fonction d'utilité est donnée par $u(x,y) = \min(x, 2y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$.

1. (1 pt) Représenter **précisément** au moins 3 courbes d'indifférence.
2. (1 pt) A partir de la représentation graphique, étudier les propriétés habituelles de la fonction d'utilité u du consommateur ((stricte) croissance, (stricte) quasi-concavité).
3. (1 pt) Déterminer la demande du consommateur quand le prix est $(3,1)$.

Question III (5 pts)

1. (2 pts) On considère une économie d'échange $\mathcal{E} = \{L, N, (u^i, e^i)_{i=1,\ldots,N}\}$ et on suppose que la fonction de demande agrégée excédentaire Z est bien définie et différentiable. Enoncer le théorème de l'unicité des prix d'équilibre dans $\mathcal{E}$ (rappeler la définition de Z et la condition de substituabilité).
2. On démontre le résultat pour $L = 2$ et $N = 2$ (biens x et y et agents 1 et 2). On suppose par l'absurde qu'il existe $p^*, p' \in \mathbb{R}_+^2$, $p^* \neq p'$, deux prix d'équilibre de $\mathcal{E}$ tels que $p_x^* + p_y^* = 1$ et $p'_x + p'_y = 1$
   (a) (0,5 pt) Ecrire explicitement $Z(p)$, pour $p \in \mathbb{R}_+^2$, et la condition de substituabilité.
   (b) (0,5 pt) Quelle hypothèse du théorème permet de dire que $p^* \gg 0$ et $p' \gg 0$? Pourquoi ?
   (c) On pose $m = \max\{\frac{p_x^*}{p'_x}; \frac{p_y^*}{p'_y}\}$ et $q = (q_x, q_y) = (mp'_x, mp'_y)$.
      i. (1 pt) Expliquer pourquoi $Z(p^*) = Z(p') = 0$. En déduire que $Z(q) = 0$.
      ii. (0,5 pt) Montrer que l'une des deux conditions suivantes est satisfaite : (1) $q_x > p_x^*$ et $q_y = p_y^*$; (2) $q_x = p_x^*$ et $q_y > p_y^*$.
      iii. (0,5 pt) En déduire une contradiction.

Microéconomie 2, janvier 2010 (2 heures)

Question I (4 pts) On considère une économie d'échange $\mathcal{E} = \{L, N, (u^i, e^i)_{i=1,\ldots,N}\}$.

1. Donner la définition d'un équilibre concurrentiel.
2. Donner la définition d'un optimum de Pareto.
3. Ces notions sont-elles liées entre elles ? Si oui comment ?

Question II (6 pts) On considère une économie à deux consommateurs ($i = 1, 2$), deux biens de consommation (x et y), un facteur de production (le travail) et deux entreprises ($j = 1, 2$). La dotation initiale du consommateur 1 est d'une unité de travail, la dotation du consommateur 2 est de deux unités de travail. Initialement, il n'y a pas de biens de consommation dans l'économie. Les fonction d'utilité sont données par $u^i(x^i, y^i) = \sqrt{x^i y^i}$ pour $i = 1, 2$. L'entreprise 1 produit le bien x à partir du travail suivant la technologie $g^1(z^1) = z^1$; l'entreprise 2 produit le bien y à partir du travail suivant la technologie $g^2(z^2) = \frac{1}{2}z^2$ où z^1 et z^2 sont les niveaux d'input en travail. On notera x^e et y^e les niveaux d'outputs produits par les entreprises. Le consommateur 1 possède les deux entreprises.

1. (1,5 pts) Calculer les fonctions de demandes des consommateurs en fonction des prix p_x, p_y et ω (le salaire) et du profit des entreprises.
2. (1,5 pts) On normalise le salaire à 1. Pourquoi à l'équilibre concurrentiel le profit des entreprises est-il nul ? En déduire les prix à l'équilibre.
3. (1 pt) Donner les conditions d'équilibre sur les marchés.
4. (1 pt) Déduire des questions précédentes l'équilibre concurrentiel de l'économie.
5. (1 pt) Sans faire de calcul, peut-on affirmer que l'équilibre concurrentiel est Pareto optimal ?

Question III (5 pts) On considère une économie à deux consommateurs et deux biens. Les dotations initiales sont données par $e^1 = (1, 1)$ et $e^2 = (1, 1)$. Les fonctions d'utilité sont données par : $u^1(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$ et $u^2(a, b) = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{3}{4}}$.

1. (2.5 pts) Déterminer la courbe des contrats et la représenter dans la boîte d'Edgeworth.
2. (1 pt) Pour des raisons d'équité, l'Etat souhaiterait privilégier l'optimum de Pareto qui garantit une quantité égale de bien x aux deux consommateurs. De quel optimum s'agit-il ?
3. (1,5 pts) Pour décentraliser cet optimum, l'Etat a la possibilité d'effectuer un transfert dans les dotations initiales en bien x. Déterminer ce transfert et l'équilibre concurrentiel correspondant.

Question IV (5 pts) On considère une économie à deux entreprises et deux biens. Les prix des biens sont strictement positifs (p_x et p_y). Les entreprises sont caractérisées chacune par un ensemble de production $Q^j \subseteq \mathbb{R}^2$, $j = 1, 2$. On définit l'ensemble de production agrégé par : $Q_{AG} = Q^1 + Q^2 := \{q \in \mathbb{R}^2 \mid \exists q^j \in Q^j, j = 1, 2,\ q = q^1 + q^2\}$

1. (1,5 pts) Montrer la propriété suivante : $q^*_{AG} = q^{1*} + q^{2*}$ est solution de $\max_{q \in Q_{AG}} p.q$ si et seulement si q^{j*} est solution de $\max_{q^j \in Q^j} p.q^j$, pour tout $j = 1, 2$.
2. Application : Le premier producteur produit du bien x à partir du bien y, sa technologie de production est décrite par la fonction g^1 avec $g^1(y) = \sqrt{y}$. Le deuxième producteur produit du bien y à partir du bien x, sa technologie de production est décrite par la fonction g^2 avec $g^2(x) = \sqrt{x + \alpha} - \sqrt{\alpha}$ où $\alpha > 0$.
   (a) (0,5 pts) Donner explicitement la définition des ensembles de production Q^1 et Q^2 des deux entreprises.
   (b) (2 pts) Déterminer l'offre et le profit pour chacune des deux entreprises.
   (c) (1 pt) En utilisant la question 1, en déduire l'offre et le profit pour l'entreprise dont l'ensemble de production est Q_{AG}.

Microéconomie 2, septembre 2010 (2 heures)

Question I (12 pts)

1. [Consommateurs] On considère une économie à deux consommateurs ($i = 1, 2$) et deux biens de consommation, le carburant et le sucre. On note x^i la consommation de carburant du consommateur i et y^i, sa consommation de sucre ($i = 1, 2$). Les fonctions d'utilité des consommateurs sont respectivement $u^1(x^1, y^1) = \ln x^1 + 2\ln y^1$ et $u^2(x^2, y^2) = 3\ln x^2 + \ln y^2$. On suppose que chaque consommateur i dispose d'un **revenu** w^i, $i = 1, 2$ (dont l'origine n'est pas spécifiée pour l'instant) ; on note p_c, le prix d'une unité de carburant et p_s, le prix d'une unité de sucre.
   (a) (1pt) Représenter **précisément** au moins 3 courbes d'indifférence du consommateur 1.
   (b) (2pts) Vérifier par le calcul que les courbes d'indifférence sont strictement décroissantes et strictement convexes. Que peut-on en déduire sur la fonction d'utilité des consommateurs ?
   (c) (2pts) Calculer la fonction de demande de chaque consommateur i, en fonction de son revenu w^i, $i = 1, 2$, et des prix p_c et p_s.
2. [Producteurs] On suppose de plus qu'une entreprise C produit le carburant c à partir de betterave, suivant la technologie $q_c = \frac{1}{2}\sqrt{z_c}$ et qu'une entreprise S produit le sucre s, également à partir de betterave, suivant la technologie $q_s = \frac{1}{3}\sqrt{z_s}$ (q_k désigne l'output de bien k et z_k, l'input de betterave, $k = c, s$). On fixe le prix d'une unité de betterave à 1 et on définit les prix p_c et p_s comme en 1. ci-dessus.
   (a) (1pt) Décrire les ensembles de production des entreprises et indiquer la nature des rendements.
   (b) (2pts) Déterminer la fonction d'offre de chaque entreprise en fonction des prix p_c et p_s.
   (c) (1pt) Déterminer le profit de chaque entreprise en fonction des prix p_c et p_s.
3. [Equilibre] On suppose à présent que chaque consommateur possède une dotation initiale d'une unité de betterave ainsi que la moitié de chaque entreprise. Chaque consommateur n'a d'utilité que pour le carburant et le sucre, suivant la fonction u^i en 1. ci-dessus, $i = 1, 2$.
   (a) (1pt) Pour chaque consommateur, déterminer son revenu à l'équilibre en fonction des prix p_c et p_s.
   (b) (2pts) Déterminer les prix d'équilibre de l'économie de production constituée par les deux consommateurs et les deux entreprises.

Question II (4 pts) On considère une économie avec deux consommateurs ($i = 1, 2$) et deux biens de consommation. Les préférences sont données par $u^1(x, y) = x$ et $u^2(x, y) = \min\{x, y\}$. Les dotations initiales dans l'économie sont données par $e^1 = (1, 1)$ et $e^2 = (2, 1)$.

1. (1pt) Représenter l'économie dans la boîte d'Edgeworth (boîte, dotations, courbes d'indifférence).
2. (2pts) Trouver une allocation qui est Pareto optimale, et une qui ne l'est pas (**expliquer précisément**). Déterminer toutes les allocations Pareto optimales.
3. (1pt) Trouver un équilibre concurrentiel de l'économie (prix et allocations) en vous aidant de la représentation graphique.

Question III (4 pts) On considère une économie d'échange $\mathcal{E} = \{L, N, (u^i, e^i)_{i=1,\dots,N}\}$. Rappeler le premier théorème du bien-être (2pts) et le démontrer (2pts).

Microéconomie 2, novembre 2010 (2 heures)

Exercice 1 (5 pts) On considère une économie avec L biens . On rappelle qu'une fonction $u : \mathbb{R}^L_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement quasi-concave si et seulement si pour tout $z, z' \in \mathbb{R}^L_+$, on a $u(\lambda z + (1-\lambda)z') > \min\{u(z), u(z')\}$ pour tout $0 < \lambda < 1$. La fonction d'utilité u de l'agent est continue, différentiable, croissante et strictement quasi-concave. La richesse de l'agent est $R > 0$. Les prix sont strictement positifs, $p \in \mathbb{R}^L_{++}$.

1. (2 pts) Ecrire le programme de l'agent, montrer que le programme admet une solution et que cette solution sature la contrainte budgétaire de l'agent.
2. (2 pts) Montrer que cette solution est unique.
3. (1 pt) On suppose le panier de biens $z^* = (z_1^*, z_2^*, ..., z_L^*) \in \mathbb{R}^L_{++}$ vérifie $TMS_{z_2 \to z_1}(z^*) > \frac{p_1}{p_2}$. Expliquer pourquoi le panier ne peut pas être solution du programme et comment l'agent veut modifier ses consommations en bien 1 et 2, toutes choses égales par ailleurs.

Exercice 2 (11 pts) On considère une économie d'échange à 2 agents (1 et 2) et 2 biens (x et y). Les préférences sont données par

$$u^1(x,y) = \frac{xy}{x+y} \qquad \text{et} \qquad u^2(x,y) = \frac{xy}{x+4y}$$

et les dotations initiales par $e^1 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ et $e^2 = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$.

1. (2 pts) Définir la notion d'élasticité de substitution et écrire les fonctions d'utilité des 2 agents de manière à montrer qu'elles sont à élasticité de substitution constante.
2. (3 pts) Montrer que les fonctions sont strictement croissantes et strictement quasi-concaves. En déduire sans calcul que l'économie possède un équilibre concurrentiel.
3. (1 pt) Calculer le taux marginal de substitution ($TMS_{y \to x}$) pour chacun des agents.
4. (2 pts) Déterminer les demandes des agents en fonction des prix.
5. (2 pts) Déterminer l'équilibre concurrentiel de l'économie.
6. (1 pt) Dans la boîte d'Edgeworth, représenter les dotations initales, l'allocation d'équilibre, les droites de budget, les courbes d'indifférence passant par l'allocation d'équilibre.

Exercice 3 (4 pts)

1. (2 pts) Rappeler **précisément** la définition d'une allocation réalisable, d'une allocation qui Pareto-domine une autre allocation, d'une allocation Pareto optimale dans une économie d'échange.

On considère une économie d'échange avec 2 agents (1 et 2) et 2 biens (x et y). Les préférences sont données par

$$u^1(x,y) = u^2(x,y) = \min\{x,y\}$$

et la dotation globale par $e = (2,5)$.

2. (1 pt) Représenter l'économie dans la boîte d'Edgeworth (boîte, courbes d'indifférence).
3. (1 pt) En utilisant la définition de Pareto optimalité, trouver une allocation qui est Pareto optimale, et une qui ne l'est pas (**expliquer précisément**).
4. (Bonus) Déterminer toutes les allocations Pareto optimales.

Microéconomie 2, janvier 2011 (2 heures)

Question de cours (4 pts) Soit $Q \in \mathbb{R}^L$ l'ensemble de production d'une entreprise. On note $q(p) \in \mathbb{R}^L$ l'offre optimale associée à un prix $p \in \mathbb{R}^L_+$, c'est-à-dire $q(p)$ est solution de $\max_{q\in Q} p \cdot q$. On rappelle que la loi de l'offre est donnée par

$$(p - p') \cdot (q(p) - q(p')) \geq 0 \quad \forall p, p' \in \mathbb{R}^L_+$$

1. (2 pts) Démontrer cette propriété.
2. (2 pts) Montrer que la loi de l'offre implique que $q_L(p') \geq q_L(p)$ pour tout $p, p' \in \mathbb{R}^L_+$ tels que $p' = (p_1, p_2, ...p_{L-1}, p_L + \epsilon)$, avec $\epsilon > 0$. Comment interpréter cette dernière relation dans le cas où L est un input ? Dans le cas où L est un output ?

Exercice 1 (production) (5 pts)

On considère une économie avec un consommateur, deux entreprises ($j = 1, 2$) et deux biens (x et y). La dotation initiale du consommateur est $e = (e_x, e_y) = (0, 10)$; sa fonction d'utilité est $u(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$. Le consommateur possède toutes les entreprises. Les deux entreprises produisent du bien x à partir du bien y avec la même technologie : $x = g^j(y) = y^{\frac{1}{2}}$, $j = 1, 2$.

1. (1 pt) Déterminer rapidement la fonction de demande $(d_x(p, \pi), d_y(p, \pi))$ du consommateur en fonction des prix (p_x, p_y) et des profits π^j, $j = 1, 2$ des entreprises.
2. (1 pt) Déterminer rapidement la fonction d'offre $\big(x^j(p),\, y^j(p)\big)$ et le profit π^j, $j = 1, 2$, des deux entreprises en fonction des prix (p_x, p_y).
3. (1 pt) Ecrire les conditions d'équilibre sur les marchés en fonction des prix (p_x, p_y).
4. (2 pts) Déterminer le prix d'équilibre (on pourra normaliser le prix du bien y : $p_y = 1$).

Exercice 2 (externalités) (11 pts)

On considère une économie d'échange avec deux consommateurs (1 et 2). Le consommateur 1 exerce une externalité sur la consommation du consommateur 2 à travers le bien x. Il y a deux biens dans l'économie (x et y). Les dotations initiales des agents sont $e^1 = e^2 = (\frac{1}{2}, 1)$. Les utilités des consommateurs 1 et 2 sont données respectivement par

$$u^1(x^1, y^1) = \sqrt{x^1 y^1}$$

$$u^2\big((x^2, y^2), x^1\big) = \sqrt{(x^2 + \frac{1}{2}x^1)y^2}$$

Afin de déterminer l'équilibre concurrentiel de l'économie, on rappelle que $\big((x^{1*}, y^{1*}), (x^{2*}, y^{2*}), (p^*_x, p^*_y)\big)$ est un équilibre concurrentiel si

- (x^{1*}, y^{1*}) est solution de $\max_{(x^1,y^1)\in B^1(p)} u^1(x^1, y^1)$
- (x^{2*}, y^{2*}) est solution de $\max_{(x^2,y^2)\in B^2(p)} u^2(x^2, y^2, x^{1*})$, ($x^{1*}$ est fixé ici)
- $x^{1*} + x^{2*} = e^1_x + e^2_x$ et $y^{1*} + y^{2*} = e^1_y + e^2_y$

où, pour tout $i = 1, 2$, $B^i(p)$ est l'ensemble budgétaire de l'agent i.

1. (1 pt) Déterminer la fonction de demande de l'agent 1, (x^{1*}, y^{1*}), en fonction des prix (p_x, p_y).
2. (1 pt) Déterminer la fonction de demande de l'agent 2, (x^{2*}, y^{2*}), en fonction des prix (p_x, p_y) et de x^{1*}.
3. (1 pt) Ecrire les conditions d'équilibre sur les marchés (en fonction des prix).

4. (2 pts) Déterminer l'équilibre concurrentiel de l'économie, prix et allocation (on pourra normaliser le prix du bien y : $p_y = 1$).
5. (1 pt) Vérifier qu'à l'équilibre l'agent 1 consomme plus de bien x que l'agent 2, qui lui-même consomme plus de bien y que l'agent 1. En donner une rapide interprétation (comparer avec le cas sans externalité).

On cherche maintenant à décrire les optima de Pareto. On admet que le problème d'optimalité peut être représenté sous la forme d'un programme d'optimisation sociale, c'est-à-dire l'allocation $\big((\bar{x}^1, \bar{y}^1), (\bar{x}^2, \bar{y}^2)\big)$ est Pareto optimale si et seulement si il existe $\rho^1, \rho^2 > 0$ tels que $\big((\bar{x}^1, \bar{y}^1), (\bar{x}^2, \bar{y}^2)\big)$ est solution de

$$\left\{\begin{array}{ll} \max_{((x^1,y^1)(x^2,y^2))} \rho^1 u^1(x^1, y^1) + \rho^2 u^2(x^2, y^2, x^1) & \\ x^1 + x^2 = e_x^1 + e_x^2 & (\lambda_1) \\ y^1 + y^2 = e_y^1 + e_y^2 & (\lambda_2) \end{array}\right.$$

6. (2 pts) Ecrire les conditions marginales d'optimalité pour les optima de Pareto qui vérifient $\bar{x}^1, \bar{y}^1, \bar{x}^2, \bar{y}^2 > 0$ (utiliser le lagrangien). Réarranger les termes pour obtenir une expression sous forme de TMS social.
7. (1 pt) En déduire la courbe des contrats (on pourra par exemple exprimer y^1 comme une fonction de x^1).
8. (2 pts) Déterminer l'optimum de Pareto qui vérifie $\bar{y}^1 = y^{1*}$ (question 5). Comment faut-il modifier les consommations de l'allocation d'équilibre pour obtenir cette allocation optimale ? Donner une rapide interprétation.

Microéconomie 2, septembre 2011 (2 heures)

Question de cours (5 pts)

On considère une économie d'échange $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1 \leq i \leq N}\}$ où les fonctions d'utilité u^i sont concaves, différentiables et strictement croissantes.

1. (3 pts) Montrer que l'ensemble des utilités réalisables défini par

$$V = \{(v^1, ..., v^N) \in \mathbb{R}^N \mid \exists \text{ une allocation réalisable } z \text{ telle que } v^i \leq u^i(z^i); i = 1, ..., N\}$$

est convexe.

2. (2 pts) D'après une propriété du cours on sait que si V est convexe alors pour toute allocation Pareto-optimale $\widetilde{z}$, il existe $\gamma^i \geq 0$, $i = 1, ..., N$, non tous nuls ($\gamma \neq 0$), tels que $\widetilde{z}$ soit solution de $\max_{z \geq 0} \sum_{i=1}^N \gamma^i u^i(z^i)$ sous $\sum_{i=1}^N z^i \leq \sum_{i=1}^N e^i$.
Ecrire précisément les conditions du premier ordre associées à ce problème d'optimisation sociale en $z \gg 0$ pour obtenir les relations d'égalité des TMS vérifiées par une allocation Pareto optimale.

Exercice 1 (consommation) (6 pts) On considère un consommateur dont les préférences sur des paniers de 2 biens $(x; y)$ sont représentées par la fonction d'utilité $u(x; y) = \min\{x; y\}$.

1. (1 pt) Représenter graphiquement les courbes d'indifférence de ce consommateur.
2. (2 pts) Déterminer la demande du consommateur $d(p; R)$, en fonction du prix $p = (p_x; p_y)$ et d'un revenu $R \in \mathbb{R}_+$, puis d'une dotation initiale $e = (e_x; e_y) \in \mathbb{R}^2_+$ du consommateur.
3. (2 pts) On suppose à présent qu'il y a un deuxième consommateur, avec la même fonction d'utilité $u(x; y) = \min\{x; y\}$ et que les dotations initiales respectives sont $e^1 = (e^1_x; e^1_y) = (2; 0)$ et $e^2 = (e^2_x; e^2_y) = (0; 2)$. Déterminer un équilibre concurrentiel de l'économie. Cet équilibre est-il unique ?
4. (1 pt) Sous les mêmes hypothèses qu'au point précédent, déterminer la courbe des contrats de l'économie et la représenter dans une boîte d'Edgeworth, dans laquelle on indiquera aussi les dotations initiales.

Exercice 2 (production) (9 pts) On considère une économie à deux consommateurs ($i = 1; 2$), deux biens de consommation ($k = 1; 2$), un facteur de production (le travail) et deux entreprises ($j = 1; 2$). On note x^i la consommation de bien 1 du consommateur i et y^i, la consommation de bien 2 du consommateur i ($i = 1; 2$). La dotation initiale de chaque consommateur est d'une unité de travail. Leurs fonctions d'utilité (qui portent exclusivement sur les biens de consommation) sont respectivement $u^1(x^1; y^1) = \frac{1}{3} \ln x^1 + \frac{2}{3} \ln y^1$ et $u^2(x^2; y^2) = \frac{2}{3} \ln x^2 + \frac{1}{3} \ln y^2$. L'entreprise 1 produit le premier bien de consommation à l'aide de travail, suivant la technologie $q_1 = \sqrt{z_1}$; l'entreprise 2 produit le second bien de consommation à l'aide de travail, suivant la technologie $q_2 = 2\sqrt{z_2}$ (q_k désigne l'output de bien k et z_k l'input de travail, $k = 1; 2$). On suppose enfin que chaque consommateur possède la moitié de chaque entreprise. On fixe le prix du travail à 1 et on note p_k le prix du bien de consommation k, $k = 1; 2$.

1. (2 pts) Résoudre le programme de maximisation du profit de chaque entreprise, de manière à déduire les offres $(\hat{z}_k, \hat{q}_k)$, $k = 1; 2$, en fonction des prix.
2. (2 pts) Résoudre le programme d'optimisation du consommateur $i = 1; 2$, de manière à déduire sa demande $\hat{x}^i$, $\hat{y}^i$ en fonction de son revenu R^i et des prix.
3. (1 pt) Exprimer le revenu R^i du consommateur $i = 1; 2$, en fonction des prix.

4. (2 pts) Pour calculer l'équilibre concurrentiel de l'économie, écrire les conditions d'apurement des marchés (travail et biens de consommation) en fonction des prix (p_1 et p_2) ; en déduire ces prix.
5. (2 pts) Faire la synthèse des résultats obtenus en complétant le texte suivant :
   A l'équilibre : l'entreprise 1 produit $\hat{q}_1 = \ldots$ unités de bien 1 à partir de $\hat{z}_1 = \ldots$ unités de travail et en tire un profit de $\hat{\pi}_1 = \ldots$
   L'entreprise 2 produit $\hat{q}_2 = \ldots$ unités de bien 2 à partir de $\hat{z}_2 = \ldots$ unités de travail et en tire un profit de $\hat{\pi}_2 = \ldots$
   Le consommateur 1 dispose donc d'un budget de $\hat{R}^1 = \ldots$ et le consommateur 2, d'un budget de $\hat{R}^2 = \ldots$
   Le consommateur 1 consomme $\hat{x}^1 = \ldots$ unités de bien 1 et $\hat{y}^1 = \ldots$ unités de bien 2, ce qui lui coûte $\hat{R}^1$
   Le consommateur 2 consomme $\hat{x}^2 = \ldots$ unités de bien 1 et $\hat{y}^2 = \ldots$ unités de bien 2, ce qui lui coûte $\hat{R}^2$.
   Les deux unités initiales de travail sont utilisées et le total de bien consommé correspond exactement au total de bien produit.

Microéconomie 2, novembre 2011 (2 heures)

Questions de cours (6 pts)

1. (1pt.) Rappeler la caractérisation/définition d'une fonction strictement quasi-concave, vue en cours.
2. (2pts.) Démontrer la proposition suivante : si la fonction d'utilité est strictement quasi-concave, le problème d'optimisation du consommateur a une solution unique.
3. (1pt.) Enoncer précisément le théorème d'existence d'un équilibre dans une économie d'échange.
4. On considère une économie avec 2 agents (1 et 2) et 2 biens (x et y). Les fonctions d'utilité sont $u^1(x, y) = x + y$ et $u^2(x, y) = x$; les dotations initiales sont $e^1 = (1, 1)$ et $e^2 = (1, 1)$.
   (a) (0.5pt.) Peut-on appliquer le théorème d'existence ? Pourquoi ?
   (b) (0.5pt.) Dans la boîte d'Edgeworth, dessiner précisément les courbes d'indifférence passant par les dotations initiales.
   (c) (1pt.) En raisonnant dans la boîte d'Edgeworth, déterminer explicitement, mais sans calculs, l'équilibre concurrentiel (prix et allocation d'équilibre).

Exercice 1 (équilibre) (9 pts) On considère une économie d'échange avec 3 agents (1, 2 et 3) et 2 biens (x et y). Les dotations initiales sont telles que $e^1 = (1, 1)$, $e^2 = (1+t, 1)$ et $e^3 = (1-t, 1)$ où $0 \leq t \leq 1$; leur fonction d'utilité sont données par $u^1(x, y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$, $u^2(x, y) = x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$ et $u^3(x, y) = x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$.

1. (1pt.) Montrer que les fonctions sont strictement croissantes et strictement quasi-concaves (le montrer précisément pour l'une d'elles seulement). Peut-on en déduire sans calcul que l'économie possède un équilibre concurrentiel ?
2. (1pt.) Après en avoir rappelé l'interprétation économique, calculer les taux marginaux de substitution du bien y pour le bien x pour chacun des agents.
3. (1pt.) Déterminer les fonctions de demande des agents en fonction des prix (et de t).
4. (2pts.) Déterminer le prix d'équilibre en fonction de t. (on normalise le prix du bien y, $p_y = 1$)
5. (2pts.) Dessiner dans le plan la fonction du prix d'équilibre du bien x en fonction de t. Comment expliquer économiquement la décroissance de la fonction ?
6. (2pts.) Déterminer l'allocation d'équilibre en fonction de t. Pour quel montant t, seuls les agents 2 et 3 échangent-ils pour obtenir leur allocation d'équilibre ?

Exercice 2 (optimum de Pareto) (5 pts) On considère une économie d'échange avec 2 biens (x et$y$) et 2 agents (1 et 2). Les fonctions d'utilité sont données par : $u^1(x, y) = x+y$ et $u^2(x, y) = x+2y$. La dotation globale de l'économie est $(4, 6)$.

1. (1pt.) Représenter la boîte d'Edgeworth et deux courbes d'indifférence pour chaque agent.
2. (1pt.) Représenter la courbe des contrats dans la boîte d'Edgeworth, en justifiant rapidement.
3. On peut retrouver le résultat en utilisant les taux marginaux de substitution :
   (a) (1pt.) Pour toute allocation réalisable $\mathbf{z} = ((x^1, y^1), (x^2, y^2))$, déterminer les taux marginaux de substitution des 2 agents en ce point : $TMS^1_{y\to x}(x^1, y^1)$ et $TMS^2_{y\to x}(x^2, y^2)$.
   (b) (1pt.) En utilisant l'interprétation des TMS, déterminer quels types d'échange permettent d'augmenter l'utilité des agents (strictement pour l'un des deux).
   (c) (1pt.) A quelles conditions sur $\mathbf{z}$ cet échange ne donne-t-il pas lieu à une nouvelle allocation réalisable ? En déduire la courbe des contrats.

Microéconomie 2, janvier 2012 (2 heures)

Questions de cours (6 pts)

1. (3pts.) On considère le problème du producteur avec un output et K inputs, avec r = prix de l'output et w_k = prix de l'input k, $k = 1, ..., K$. La technologie est décrite par une fonction de production g différentiable.
   (a) Ecrire le programme du producteur.
   (b) Déterminer les conditions marginales d'optimalité en une solution intérieure.
   (c) Interpréter les équations trouvées.
2. (3pts.) On considère une économie de production

$$\mathcal{E} = \{L, N, M, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}, (Q^j)_{1\leq j\leq M}, (\theta^{ij})_{1\leq i\leq N, 1\leq j\leq M}\}$$

   (a) Rappeler la définition d'un équilibre concurrentiel dans cette économie.
   (b) Rappeler les définitions d'allocation réalisable et d'optimum de Pareto dans cette économie.
   (c) Enoncer le 1er théorème du bien-être.

Exercice 1 (production) (8 pts)

On considère une économie à deux consommateurs , deux biens de consommation, un facteur de production (le travail) et deux entreprises. On note x^i la consommation de bien 1 du consommateur i et y^i, la consommation de bien 2 du consommateur i, $(i = 1; 2)$. La dotation initiale du consommateur 1 est d'une unité de travail ; celle du consommateur 2, de 2 unités de travail. Leurs fonctions d'utilité sont $u^i(x^i; y^i) = \sqrt{x^i y^i}$, $i = 1; 2$. L'entreprise 1 produit le premier bien de consommation à l'aide de travail, suivant la technologie $q_1 = z_1$; l'entreprise 2 produit le second bien de consommation à l'aide de travail, suivant la technologie $q_2 = \frac{1}{2}z_2$ (q_k désigne l'output de bien k et z_k, l'input de travail, $k = 1; 2$). On suppose enfin que le consommateur 1 possède les entreprises.

1. (1 pt) Ecrire les conditions que doit satisfaire une allocation $(x^1; y^1; x^2; y^2; q_1; z_1; q_2; z_2)$ pour être réalisable dans cette économie. En déduire qu'une allocation $(x^1; y^1; x^2; y^2)$ en biens de consommation est réalisable si et seulement si, $x^1 + x^2 + 2(y^1 + y^2) = 3$.
2. (3 pts) Montrer que l'économie possède un équilibre concurrentiel, en fixant le prix du travail à 1 et en notant p_k le prix du bien de consommation k, $k = 1; 2$. Calculer l'utilité de chaque consommateur à l'équilibre.
3. (1 pt) Sans faire de calcul, peut-on affirmer que l'équilibre concurrentiel est Pareto-optimal ?
4. (3 pts) En utilisant le point 1., écrire le programme d'optimisation sociale qui permet de déduire les optima de Pareto. Déterminer les allocations Pareto optimales intérieures et montrer qu'une paire de niveaux d'utilités $(v^1; v^2)$ pour les consommateurs est Pareto-optimale si et seulement si $v^1 + v^2 = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, $v^1, v^2 \geq 0$. Représenter graphiquement l'ensemble des niveaux d'utilités réalisables dans l'économie et les niveaux d'utilités de l'équilibre concurrentiel. Vérifier que l'équilibre est Pareto optimal.

Exercice 2 (équilibre de Lindahl) (6 pts)

On reprend le modèle vu en cours : on considère une économie avec 2 biens, une bien privé et un bien public , 2 consommateurs $(i = 1, 2)$ dont les dotations en bien privé sont e^i et les fonctions d'utilité sont u^i et une entreprise dont la fonction de production est g.

On considère l'équilibre de Lindahl, c'est à dire un concept d'équilibre où les consommateurs paient le bien public à un prix personnalisé, noté p^i, $i = 1, 2$; le bien public est produit par une entreprise qui utilise le bien privé comme input et qui considère que le prix d'une unité d'output est $p = p^1 + p^2$.

Le prix du bien privé est normalisé à 1 et on utilisera les notations suivantes : x^i est la consommation en bien privé du consommateur i, z est la quantité d'input en bien privé utilisé par l'entreprise, y est la consommation en bien public, y^e est la quantité de bien public produite par l'entreprise.

1. (1pt) Ecrire le programme de chaque consommateur et le programme de l'entreprise.
2. (1pt) Ecrire les conditions d'apurement sur les marchés à l'équilibre.
3. (1pt) Déterminer les conditions marginales d'optimalité des choix de consommation à l'équilibre, pour les solutions intérieures.
4. (1pt) Déterminer les conditions marginales d'optimalité de l'offre de l'entreprise à l'équilibre, pour les solutions intérieures.
5. (2pts) En réarrageant les termes, montrer que les conditions de Bowen-Lindhal-Samuelson sont satisfaites à l'équilibre. Que peut-on en déduire ?

Microéconomie 2, aout 2012 (2 heures)

Questions de cours (3 pts)

On considère une économie de production

$$\mathcal{E} = \{L, N, M, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}, (Q^j)_{1\leq j\leq M}, (\theta^{ij})_{1\leq i\leq N, 1\leq j\leq M}\}$$

1. Rappeler la définition d'un équilibre concurrentiel dans cette économie.
2. Rappeler les définitions d'allocation réalisable et d'optimum de Pareto dans cette économie.
3. Enoncer le 1er théorème du bien-être.

Exercice 1 (production) (7 pts) On considère une économie à deux consommateurs ($i = 1; 2$), deux biens de consommation ($k = 1; 2$), un facteur de production (le travail) et deux entreprises ($j = 1; 2$). On note x^i la consommation de bien 1 du consommateur i et y^i, la consommation de bien 2 du consommateur i ($i = 1; 2$). La dotation initiale de chaque consommateur est d'une unité de travail. Leurs fonctions d'utilité (qui portent exclusivement sur les biens de consommation) sont respectivement $u^1(x^1; y^1) = \frac{1}{3}\ln x^1 + \frac{2}{3}\ln y^1$ et $u^2(x^2; y^2) = \frac{2}{3}\ln x^2 + \frac{1}{3}\ln y^2$. L'entreprise 1 produit le premier bien de consommation à l'aide de travail, suivant la technologie $q_1 = \sqrt{z_1}$; l'entreprise 2 produit le second bien de consommation à l'aide de travail, suivant la technologie $q_2 = 2\sqrt{z_2}$ (q_k désigne l'output de bien k et z_k l'input de travail, $k = 1; 2$). On suppose enfin que chaque consommateur possède la moitié de chaque entreprise. On fixe le prix du travail à 1 et on note p_k le prix du bien de consommation k, $k = 1; 2$.

1. (2 pts) Résoudre le programme de maximisation du profit de chaque entreprise, de manière à déduire les offres $(\hat{z}_k, \hat{q}_k)$, $k = 1; 2$, en fonction des prix.
2. (2 pts) Résoudre le programme d'optimisation du consommateur $i = 1; 2$, de manière à déduire sa demande $\hat{x}^i$, $\hat{y}^i$ en fonction de son revenu R^i et des prix.
3. (1 pt) Exprimer le revenu R^i du consommateur $i = 1; 2$, en fonction des prix.
4. (2 pts) Pour calculer l'équilibre concurrentiel de l'économie, écrire les conditions d'apurement des marchés en fonction des prix ; en déduire ces prix.

Exercice 2 (équilibre avec biens publics) (10 pts)

On considère une économie comprenant deux consommateurs (1 et 2) dont les fonctions d'utilité sont respectivement :

$$u^1(x^1, y) = \ln x^1 + 2\ln y$$

$$u^2(x^2, y) = 2\ln x^2 + \ln y$$

où $x^i > 0$ désigne la quantité de bien privé consommé par l'agent i et $y > 0$ la quantité de bien public produit dans l'économie. La fonction de production du bien public à partir du bien privé est $y = g(z) = z$. La dotation initiale de chaque consommateur est de 15 unités de bien privé.

1. (1 pt) Caractériser l'ensemble des allocations (x^1, x^2, y, z) réalisables dans l'économie.
2. (2 pts) Caractériser l'ensemble des allocations (x^1, x^2, y, z) Pareto-optimales.
3. (1 pt) Déterminer l'optimum de Pareto associé à des prélèvements identiques pour les deux consommateurs.
4. (1 pt) Rappeler la définition de l'équilibre de Lindahl pour cette économie.

5. Une souscription d'équilibre est une paire de contributions (z^{1*}, z^{2*}) en bien privé telle que

$$z^{1*} = \tilde{z}^1(z^{2*}) \text{ et } z^{2*} = \tilde{z}^2(z^{1*})$$

où $\tilde{z}^1(z^2)$ est la solution du programme de maximisation (z^2 est considéré comme un paramètre)

$$\begin{cases} \max_{x^1, z^1, y} u^1(x^1, y) \\ s.c.\ x^1 = e^1 - z^1 \\ y = g(z^1 + z^2) \\ z^1, x^1 \geq 0 \end{cases}$$

et $\tilde{z}^2(z^1)$ est la solution du programme de maximisation (z^1 est considéré comme un paramètre)

$$\begin{cases} \max_{x^2, z^2, y} u^2(x^2, y) \\ s.c.\ x^2 = e^2 - z^2 \\ y = g(z^1 + z^2) \\ z^2, x^2 \geq 0 \end{cases}$$

(a) (1 pt) Sans calculs, comparer les comportements des agents dans l'équilibre de Lindahl et dans la souscription d'équilibre.

(b) (2 pts) Etant donné z^2, calculer $\tilde{z}^1(z^2)$. Etant donné z^1, calculer $\tilde{z}^2(z^1)$.

(c) (1 pt) En déduire la souscription d'équilibre (z^{1*}, z^{2*}) de cette économie.

(d) (1 pt) Vérifier si l'allocation associée $(x^{1*}, x^{2*}, y^*, z^{1*}+z^{2*})$ est Pareto optimale (les consommations x^{1*}, x^{2*}, y^* sont déterminées par les contraintes budgétaires dans les 2 programmes) ? Donner rapidement une intuition du résultat.

Microéconomie 2, novembre 2012 (2 heures)

Exercice 1 (5 points) On considère une économie d'échange $\mathcal{E} = \{L, N, (u^i, e^i)_{i=1,\dots,N}\}$, avec $L = 2$ et $N = 10$ où la fonction d'utilité de chaque agent i est donnée par :

$$u^i(x^i) = (x_1^i)^{\alpha_i}(x_2^i)^{1-\alpha_i},\ \ 0 < \alpha_i < 1$$

1. (2pts) Pour chaque agent $i = 1, \dots, 10$, déterminer la fonction de demande en fonction des prix (p_1, p_2), de la dotations initiale (e_1^i, e_2^i) et de α_i, en justifiant rapidement. (on ne fera les calculs que pour un seul agent quelconque i)
2. On suppose que pour chaque agent i, $\alpha_i = \frac{i}{11}$ et $e^i = (1, 1)$.
   (a) (1pt) Ecrire les conditions d'équilibre sur les marchés seulement en fonction des prix (p_1, p_2).
   (b) (2pts) Déterminer les prix d'équilibre (on pourra normaliser le prix du bien 2 à 1) et en déduire les allocations d'équillibre.

Exercice 2 (5 points) On considère la fonction d'utilité suivante :

$$u(x, y) = x + \sqrt{y}$$

1. (1pt) Montrer que la fonction d'utilité est strictement croissante et strictement quasi-concave.
2. (2pts) Tracer précisément les 2 courbes d'indifférence du consommateur qui donnent les utilités $\bar{u} = 1$ et $\bar{u} = 2$. On précisera notamment en quels points ces courbes intersectent les axes des abscisses et des ordonnées et on donnera les pentes des courbes en ces points.
3. (2pts) On suppose que le revenu w est égal à 1, déterminer la demande du consommateur $D(p, w)$ dans les 2 cas de figure suivants $p = (1, 1)$ et $p = (3, 1)$. On pourra s'aider du dessin précédent.

Exercice 3 (10 points) On considère une économie avec L biens.

Partie A. (questions de cours)

On suppose qu'il existe un consommateur dont la fonction d'utilité est croissante et strictement quasi-concave.

1. (1pt) Montrer que la solution du programme du consommateur sature la contrainte budgétaire.
2. (2pts) Montrer que la solution du programme du consommateur est unique.

Partie B.

On suppose qu'un économiste observe les prix et les choix du consommateur sur 2 périodes $t = 1, 2$. Il observe le panier $x(1)$ et les prix $p(1)$ en $t = 1$, et le panier $x(2)$ et les prix $p(2)$ en $t = 2$.

3. (2pts) Considérons l'exemple suivant avec $L = 2$, $p(1) = (2, 1)$ et $p(2) = (1, 2)$, et, $x(1) = (2, 1)$ et $x(2) = (1, 2)$. Représenter sur un même dessin les deux contraintes budgétaires et les choix de l'agent en $t = 1$ et $t = 2$. Expliquer pourquoi ces choix ne sont pas compatibles avec l'hypothèse d'un consommateur rationnel, c'est-à-dire qui maximise son utilité sous contrainte budgétaire. (on utilisera les questions précédentes).
4. (1pt) Plus généralement, avec L biens, montrer que les choix $x(1)$ et $x(2)$ observés doivent nécessairement vérifier :

$$p(1) \cdot x(2) \leq p(1) \cdot x(1) \text{ avec } x(1) \neq x(2) \Rightarrow p(2) \cdot x(1) > p(2) \cdot x(2) \tag{1}$$

Remarque. La propriété (1), appelée axiome faible des préférences révélées, est très importante en pratique. Elle permet à l'économiste de savoir si le consommateur est bien rationnel dans ses choix à partir des seules données observées (sans connaître explicitement la fonction d'utilité).

Partie C.

On considère maintenant une économie d'échange $\mathcal{E} = \{L, N, (u^i, e^i)_{i=1,\ldots,N}\}$ où les fonctions d'utilité sont croissantes. On appelle fonction de demande agrégée excédentaire la fonction $Z : \mathbb{R}_+^L \to \mathbb{R}_+^L$ qui à tout prix $p \in \mathbb{R}_+^L$ associe les quantités :

$$Z(p) = \sum_{i=1}^{N} \big(D^i(p) - e^i\big)$$

où D^i est la fonction de demande de l'agent i que l'on suppose bien définie.

5. (1pt) Montrer que $p \cdot Z(p) = 0$ pour tout prix $p \in \mathbb{R}_+^L$ (on utilisera la question 1 de la partie A).
6. (1pt) Montrer que $Z(p^*) = 0$ pour tout prix d'équilibre concurrentiel p^*.
7. (2pts) En déduire que le prix d'équilibre est unique si la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall p, p' \in \mathbb{R}_+^L,\ p \cdot \sum_{i=1}^{N} D^i(p') \leq p \cdot \sum_{i=1}^{N} D^i(p) \Rightarrow p = p' \text{ ou } p' \cdot \sum_{i=1}^{N} D^i(p) > p' \cdot \sum_{i=1}^{N} D^i(p')$$

Remarque. Cette propriété est une version *agrégée* de l'équation (1).

Microéconomie 2, janvier 2013 (2 heures)

Questions de cours (4 points)

1. (1pt) Rappeler le théorème d'existence d'un équilibre concurrentiel dans économie d'échange $\mathcal{E}$.
2. (1pt) Rappeler le premier théorème du bien-être dans une économie de production $\mathcal{E}$.
3. Soit une économie de production avec 1 agent et 1 entreprise et 2 biens. L'utilité du consommateur est donnée par $u(x, y) = \min\{x, y\}$, la fonction de production de l'entreprise qui produit du bien y à partir du bien x est donnée par $g(x) = 3x$. La dotation de l'agent est $e = (3, 1)$.
   (a) (1pt) Rappeler la définition d'un optimum de Pareto dans cette économie.
   (b) (1pt) L'allocation initiale dans l'économie, c'est-à-dire la dotation initiale $e = (3, 1)$ avec le plan de production $(0, 0)$, est-elle Pareto optimale ? Si ce n'est pas le cas trouver une allocation réalisable qui la Pareto-domine.

Exercice 1 (Economie de Production) (11 points) On considère une économie avec 2 consommateurs, 3 entreprises et 2 biens (x et y).

La fonction d'utilité du consommateur 1 est donnée par $u^1(x^1, y^1) = (x^1)^{\frac{1}{2}}(y^1)^{\frac{1}{2}}$. Celle du consommateur 2 par $u^2(x^2, y^2) = (x^2)^{\frac{1}{3}}(y^2)^{\frac{2}{3}}$. La dotation initiale de chaque consommateur est $(1, 1)$. La part de l'entreprise $j = 1; 2; 3$ détenue par le consommateur $i = 1; 2$ est notée θ^{ij}.

Chaque entreprise $j = 1; 2; 3$ produit du bien y à partir du bien x suivant la technologie g^j ; on notera respectivement x_e^j et y_e^j les quantités de bien x et de bien y choisies. Les fonctions de production sont données par : $g^1(x_e^1) = \sqrt{x_e^1}$; $g^2(x_e^2) = 2\sqrt{x_e^2}$; et $g^3(x_e^3) = 3\sqrt{x_e^3}$.

1. (3pts) Pour chaque entreprise $j = 1; 2; 3$, déterminer la fonction d'offre et le profit maximal en fonction d'un prix donné (p_x, p_y) (1 point par entreprise). On notera $\pi^j(p_x, p_y)$ le profit maximal de l'entreprise j.
2. (2pts) Pour chaque consommateur $i = 1; 2$, déterminer la fonction de demande en fonction d'un prix donné (p_x, p_y) et des θ^{ij} et $\pi^j(p_x, p_y)$ pour $j = 1; 2; 3$ (1 point par consommateur).
3. On suppose que $\theta^{ij} = 0.5$ pour tout $i = 1; 2$ et tout $j = 1; 2; 3$.
   (a) (2pt) Ecrire les conditions d'équilibre sur les marchés seulement en fonction des prix (p_x, p_y).
   (b) (2pts) Ecrire, sans la résoudre, l'équation du second degré qui sert à déterminer le prix d'équilibre du bien x (le prix du bien y est normalisé à 1).
4. (2pts) On suppose maintenant que les 3 entreprises sont entièrement détenues par le consommateur 2. A l'équilibre, produit-on ici plus ou moins de bien y que dans la situation précédente ? Justifier précisément (sans calculs).

Exercice 2 (Externalités) (5 points) Soit une économie d'échange avec 2 agents et 2 biens (x et y). La consommation de bien y par l'agent 1 affecte l'agent 2. Le programme d'optimisation social peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} \max_{x,y} & \rho^1 u^1(x^1, y^1) + \rho^2 u^2(x^2, y^2; y^1) \\ s.c. & x^1 + x^2 = e_x \\ & y^1 + y^2 = e_y \end{cases}$$

où $\rho^1, \rho^2 > 0$ et e_x, e_y désignent les dotations globales en biens.

1. (3pts) En suivant la méthode vue en cours, déterminer les condition nécessaire d'optimalité, en termes de TMS, satisfaites par tout optimum de Pareto (intérieur) (pour des fonctions d'utilités différentiables).

2. (2pts) On suppose que l'externalité produite par l'agent 1 sur l'agent 2 est positive. En utilisant l'équation trouvée à la question 1, comment les consommations varient-elles à l'optimum, en tendance, par rapport au cas sans externalité ? Illustrer votre propos en représentant les courbes des contrats dans la même boîte d'Edgeworth pour les cas "avec" et "sans" externalités.

Microéconomie 2, septembre 2013 (2 heures)

Questions de cours (3 points)

1. (1pt) Rappeler la définition d'une fonction quasi-concave $f : \mathbb{R}_+^L \to \mathbb{R}$.
2. (1 pt) Sous quelle condition, le problème du consommateur admet-il une solution unique ? Quelles sont alors les propriétés principales de la fonction de demande ?
3. (1pt) Rappeler le second théorème du bien-être dans une économie de production $\mathcal{E}$.

Exercice 1 (12 pts) On considère une économie d'échange à 2 agents (1 et 2) et 2 biens (x et y). Les dotations initiales des agents, notées $e^i = (e_x^i, e_y^i) \in \mathbb{R}_+^2$, sont

$$e^1 = (1,0) \qquad e^2 = (0,1)$$

Les fonctions d'utilité $u^i : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1,2$, sont

$$u^1(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}, \quad u^2(x,y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$$

1. (2 pts) Vérifier **explicitement** si la fonction d'utilité du premier agent est : croissante, strictement croissante, quasi-concave, strictement quasi-concave.
2. (2 pts) Déterminer la demande de chacun des agents en fonction du prix $p = (p_x, p_y)$ et de sa dotation initiale, en donnant les étapes du calcul.
3. (1 pt) Peut-on dire, *sans faire aucun calcul*, que cette économie possède un équilibre concurrentiel ? Pourquoi ?
4. (2 pts) Le cas échéant, déterminer l'équilibre (ou les équilibres) concurrentiel(s) de cette économie.
5. (2 pts) Déterminer l'équation de la courbe des contrats, en donnant les étapes du calcul.
6. (1 pt) Quelles sont les propriétés de l'allocation $\left[(\frac{1}{4}, \frac{3}{5}), (\frac{3}{4}, \frac{2}{5})\right]$?
7. (2 pts) Représenter dans une boîte d'Edgeworth : les dotations initiales, quelques courbes d'indifférence des agents, l'équilibre (ou les équilibres) concurrentiel(s) éventuels (droite budgétaire et allocations), la courbe des contrats.

Exercice 2 (2 pts) Soit une économie de production avec 1 agent et 1 entreprise et 2 biens. L'utilité du consommateur est donnée par $u(x,y) = \min\{x,y\}$, la fonction de production de l'entreprise qui produit du bien y à partir du bien x est donnée par $g(x) = 3x$. La dotation de l'agent est $e = (3,1)$.

1. (1pt) Rappeler la définition d'une allocation réalisable et d'un optimum de Pareto **dans cette économie**.
2. (1pt) L'allocation initiale dans l'économie, c'est-à-dire la dotation initiale $e = (3,1)$ avec le plan de production $(0,0)$, est-elle Pareto optimale ? Si ce n'est pas le cas trouver une allocation réalisable qui la Pareto-domine.

Exercice 3 (3 pts) Rappeler brièvement les ingrédients du modèle d'économie avec externalités vu en cours. Expliquer pourquoi l'équilibre concurrentiel n'est pas toujours Pareto optimal dans ce cadre (sans utiliser d'équations mais en donnant plutôt l'intuition générale).